

WYBRANE ZADANIA EGZAMINACYJNE
AGH 2023

Zadanie 1 [1p.] Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 7x - 2$ w punkcie $P = (1, -5)$ jest równy

- A. -4 B. 4 C. -2 D. 2

Zadanie 2 [1p.] Równanie $\cos^2 x = \cos x$ w przedziale $[-\pi, 0]$

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie. B. ma dokładnie dwa rozwiązania.
C. ma dokładnie trzy rozwiązania. D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 3 [1p.] Wyrażenie

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{\left(\frac{a}{b}-1\right)a - \left(\frac{b}{a}-1\right)b},$$

dla $a, b \neq 0$ i $|a| \neq |b|$, jest równe

- A. $\frac{a^4+b^4}{a^3-b^3}$ B. $\frac{a^3+b^3}{a^4-b^4}$ C. $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$ D. $\frac{a^4+b^4}{a^4-b^4}$.

Zadanie 4 [1p.] Granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^3 + n^2 + 2n}{n^3 + 3n^2 + 4n^5}$$

jest równa

- A. $-\frac{7}{4}$ B. -7 C. 0 D. $-\infty$

Zadanie 5 [2p.] Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdzie $b = 11$, $d = 12$ i $cx + d \neq 0$. Środkiem symetrii wykresu funkcji f jest punkt $A = (6, -4)$. Oblicz iloraz $\frac{b}{a}$. Wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Odpowiedź:

--	--	--

Zadanie 6 [3p.] Udowodnij, że dla wszystkich liczb dodatnich a, b takich, że $4a^2 + b^2 \leq 4$ zachodzi nierówność $2a + b \leq 3$.

Zadanie 7 [3p.] Dla jakich wartości parametru k dziedziną funkcji

$$f(x) = \sqrt{(k+3)x^2 + (k+3)x + 2}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych?

Zadanie 8 [3p.] Dane są liczby $a = \log 8 + 3 \log 5$ i $b = \frac{\log_9 7}{\log_7 49}$. Oblicz a^b .

Zadanie 9 [4p.] Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy losowo liczbę dziewięciocyfrową o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby nieparzystej, w której cyfry 5 i 7 sąsiadują ze sobą.

Zadanie 10 [4p.] Rozwiąż równanie

$$2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot 4^{x+8}.$$

Zadanie 11 [4p.] Dla jakich wartości parametru p pierwiastki x_1, x_2 równania

$$x^2 - (p + 3)x + p = 0$$

spełniają warunek $|x_1 - x_2| < 3$?

Zadanie 12 [5p.] Z liczb od 1 do 20 losujemy kolejno bez zwracania pięć liczb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga z wylosowanych liczb jest podzielna przez 4, a ostatnia przez 5.

Zadanie 13 [5p.] Dana jest funkcja:

$$f : [-4, 4] \ni x \mapsto |3 - x| - |4 + 2x| + |6x|.$$

(a) Wyznacz jej wartość najmniejszą i największą.

(b) Rozwiąż nierówność

$$f(x) > 8.$$

Zadanie 14 [6p.] W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną wynosi $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Wyznacz stosunek długości krawędzi podstawy graniastosłupa do jego wysokości.

Zadanie 15 [7p.] W figurę ograniczoną parabolą $y = \frac{1}{8}x^2$ i prostą $y = 6$ wpisano prostokąt o bokach równoległych do osi OX i OY . Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta o największym polu.